Representations of hypergroups and harmonic analysis (Various Issues relating to Representation Theory and Non-commutative Harmonic Analysis)

河上, 哲

数理解析研究所講究録
第2031巻 2017年 167-179

Representations of hypergroups and harmonic analysis

奈良教育大学・数学教室 河上 哲 (Satoshi Kawakami)
Department of Mathematics
Nara University of Education

Abstract

The purpose of the present research is to investigate a hypergroup associated with irreducible characters of a compact hypergroup H and a closed subhypergroup H_0 of H with $|H/H_0| < +\infty$. This research is a joint work with Herbert Heyer, Tatsuya Tsurii and Satoe Yamanaka. The convolution of this hypergroup is introduced by inducing irreducible characters of H_0 to H and by restricting irreducible characters of H to H_0. The method of proof relies on the notion of an induced character and an admissible hypergroup pair.

概要 ハイパー群 H とその部分ハイパー群 H_0 のペア (H, H_0) に付随して得られるハイパー群 $\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0})$ について考察する。. $\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0})$ の convolution は既約表現の誘導と制限を用いて与える. ここでは、 次の 3 つのケースについて説明する.

(A) compact groups.

(B) compact hypergroups.

(C) commutative hypergroups.

ハイパー群（hypergroup）は、局所コンパクト群を確率論的に一般化した概念であり、表現論との関連では、コンパクト群の双対がハイパー群の構造を持っている。素粒子（純粋状態）を群の既約表現と解釈する時、それらのテンソル積の既約分解に相当するのが、ハイパー群の合成積（convolution）であり、粒子と粒子の衝突により、一定の確率で別の粒子が出現する物理現象の記述に適合している。また、この宇宙は、クオークの衝突においてわずかな対称性の破れにより誕生したと説明されているが、この現象の数理的な説明においてもハイパー群の概念が重要な役割を果たすと思われる。

$$\text{locally compact groups} \quad \subset \quad \text{hypergroup } K = (K, M^b(K), \circ, *)$$

(対称性) (対称性の破れ)

有限ハイパー群の公理 有限集合 $K=\{c_0,c_1,\dots,c_n\}$ に対して, K を基底とする $\mathbb{C}$ 上の線形空間を $\mathbb{C}K$ または $M^b(K)$ で表す. すなわち,

$$\mathbb{C}K := \left\{\sum_{j=0}^{n} a_jc_j \ :\ a_j\in\mathbb{C}\ \ (j=0,1,2,\dots,n)\right\}.$$

また,

$$(\mathbb{C}K)_1 := \left\{\sum_{j=0}^{n} a_jc_j \ :\ a_j\geq 0\ \ (j=0,1,2,\dots,n),\ \sum_{j=0}^{n} a_j=1\right\}.$$

この $(\mathbb{C}K)_1$ は K 上の確率測度の集合と解釈する。

$\mathbb{C}K$ 上に合成積 $\circ$ と対合 $*$ が定義されていて, 以下の公理 (a), (b), (c) を満たすとき, $K=(K,\mathbb{C}K,\circ,*)$ は有限ハイパー群であると呼ばれている.

(a) $(\mathbb{C}K,\circ,*)$ は, c_0 を単位元とする結合律を満たす $*$-環である.

(b) $c_i,c_j\in K$ に対して, $c_i\circ c_j\in(\mathbb{C}K)_1$ である.

(c) $K^*=K$ であり, $c_i,c_j\in K$ に対して, $c_j=c_i^*$ となる必要十分条件は, $c_0\in\mathrm{supp}(c_i\circ c_j)$ である.

$\mathbb{C}K$ 上の合成積 $\circ$ が可換であるとき, K は可換ハイパー群と呼ばれている.

1. 動機と背景

ハイパー群に関する古典的な問題として、「与えられた位相空間 X 上のハイパー群の構造を明らかにせよ」という問題がある。 この問題に対して下記のことが知られている。

(1) 位数 2 のハイパー群. $X=\{0,1\}$, $\mathbb{Z}_q(2)=\{c_0,c_1\}$ $(0<q\leq 1)$.

$$c_1^2 = qc_0+(1-q)c_1.$$

(2) 位数 3 のハイパー群. 2002 年に Wildberger によってその構造が決定された. 例えば, $X=\{0,1,2\}$, $\mathbb{Z}_q(3)=\{c_0,c_1,c_2\}$ $(0<q\leq 1)$.

$$c_2^*=c_1,\quad c_1c_2=qc_0+\frac{1-q}{2}c_1+\frac{1-q}{2}c_2.$$

(3) 位数 4 のハイパー群はまだ決定されていない.

(4) 位数 5 のハイパー群には非可換なハイパー群が存在する (大野, 鈴木, 松澤, 釣井, 山中 (2016)).

※ 九州大学 落合啓之先生からのコメント：上記で得られた位数 5 の非可換なハイパー群は $\mathbb{C}K = M(2,\mathbb{C}) \oplus \mathbb{C}$ の基底として実現される.

(5) $X = \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ 上のハイパー群の構造はたくさんある. 多くは直交多項式によって実現される.

(i) 第 1 種チェビシェフハイパー群 $\mathcal{K}^1(\mathbb{Z}_+)$. ($\mathbb{Z}$ 上のランダムウォーク, orbital hypergroup).

(ii) 第 2 種チェビシェフハイパー群 $\mathcal{K}^2(\mathbb{Z}_+)$. $\mathcal{K}^2(\mathbb{Z}_+) \cong \mathcal{K}(\widehat{SU(2)})$.

(6) $X = [-1, 1]$ 上のハイパー群.

(i) $\widehat{\mathcal{K}^1(\mathbb{Z}_+)} \cong \mathcal{K}^1([-1,1]) = \{\chi_x : -1 \leq x \leq 1\}$.

$$\chi_{\cos\theta_1} * \chi_{\cos\theta_2} = \frac{1}{2}\chi_{\cos(\theta_1+\theta_2)} + \frac{1}{2}\chi_{\cos(\theta_1-\theta_2)}.$$

(ii) $\widehat{\mathcal{K}^2(\mathbb{Z}_+)} \cong \mathcal{K}(SU(2))$.

(7) $X = \mathbb{T}$ のとき. $\mathcal{K}(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ に限る. Zeuner (1989)

(8) $X = \mathbb{T} \cup \mathbb{T}$ のとき. Voit (2008).

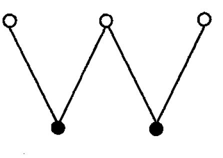
Question $X = \mathbb{T}^2 \cup \mathbb{T}^2$, $X = \mathbb{T}^2 \cup \mathbb{T}$ 上のハイパー群の構造は？

(9) $X = \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ のとき. Bessel-Kingman hypergroup 等.

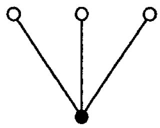
2. Jones-Ocneanu との出会い (1988, UCB, Berkeley)

因子環の包含関係 $M \supset N$ を解析するにあたって、Jones はその index $[M : N]$ の概念を導入した。さらに、index が等しい場合、つまり、$M \supset N_1$, N_2 が $[M : N_1] = [M : N_2]$ のケースの解析に Ocneanu は paragroup の概念を導入した。1988 年に Ocneanu に会ったとき、「君は $S_3 \supset \mathbb{Z}_2$ と $\mathbb{Z}_3 \supset \{e\}$ は両者ともその指数は 3 であるが、これらの包含関係の違いをどのように捉えるか?」と質問された。Ocneanu の答えは、「表現の誘導と制限を繰り返し行えば、あるグラフが得られるが、そのグラフの違いにより、包含関係の違いを説明できる。」であった。このアイディアが paragroup の出発点であった。

(i) $G = S_3 = \mathbb{Z}_3 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$, $G_0 = \mathbb{Z}_2$



(ii) $G = \mathbb{Z}_3$, $G_0 = \{e\}$.



(i), (ii) 共に $[G : G_0] = 3$.

3. Sunder-Wildberger との出会い (1996, NSW, Sydney)

因子環の包含関係 $M \supset N$ において、その principal graph として、A 型、D 型、E 型の Dynkin diagram が現れる。そこで、Sunder と Wildberger は逆に Dynkin diagram (A 型, D 型, E 型) から Fusion Rule Algebra やハイパー群を構成しようとしていた。これが私にとって、ハイパー群との最初の出会いであった。

4. Heyer-Voit との出会い (2004, NUE, Nara)

2004 年頃に、日独共同の無限次元調和解析研究会の準備の為に、Heyer さんと Voit さんが来日していた。その折、平井先生と辰馬先生の古くからの友人である Heyer さんを平井先生から紹介して頂いた。その後、Heyer さんとハイパー群に関する共同研究が始まり、現在も続いている。また、奈良教育大学において、Heyer さんと Voit さんに講演をして頂いた。そのとき、Voit さんは $X = \mathbb{T} \cup \mathbb{T}$ 上のハイパー群を決定しようとしていた ([8])。私達は、そのとき、ハイパー群の拡大問題

$$1 \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow X \longrightarrow \mathbb{Z}_q(2) \longrightarrow 1 : \text{exact}$$

を考えていた。その答えが同じであることに感動を覚えた。

(A) Compact groups.

G が compact group のとき、$\pi \in \hat{G}$ に対して

$$Ch(\pi)(g) := \mathrm{tr}(\pi(g)),$$
$$ch(\pi)(g) := \frac{1}{\dim \pi}\mathrm{tr}(\pi(g))$$

とおく。このとき,

$$\mathcal{F}(\hat{G}) = \{Ch(\pi) : \pi \in \hat{G}\} \ : \ \text{fusion rule algebra},$$
$$\mathcal{K}(\hat{G}) = \{ch(\pi) : \pi \in \hat{G}\} \ : \ \text{character hypergroup of } G,$$
$$\mathcal{K}(G) = \{\text{all conjugacy classes of } G\} \ : \ \text{conjugacy class hypergroup of } G$$

である。

$G_0 \subset G$, $|G/G_0| < +\infty$ のケースでは、

(1) character formula.

$\tau \in \widehat{G_0}$ に対して,

$$ch(\mathrm{ind}_{G_0}^G \tau)(g) = \int_G ch(\tau)(sgs^{-1}) 1_{G_0}(sgs^{-1}) ds.$$

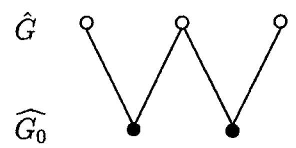
(2) Frobenius reciprocity theorem.

$\pi \in \hat{G}$, $\tau \in \widehat{G_0}$ に対して,

$$[\mathrm{ind}_{G_0}^{G}\tau : \pi] = [\mathrm{res}_{G_0}^{G}\pi : \tau](=: m_{\pi,\tau})$$

が成り立っている。ここで、$\hat{G} \cup \widehat{G_0}$ が頂点で、$m_{\pi,\tau}$ を辺とする Frobenius diagram D が得られる。

Example $G = S_3 = \mathbb{Z}_3 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$, $G_0 = \mathbb{Z}_2$ のケースの Frobenius diagram は



であり、これは A_5 型の Dynkin diagram である。

ここで、$\mathcal{K}(\hat{G} \cup \widehat{G_0}) := \{(ch(\pi), \circ), (ch(\tau), \bullet) : \pi \in \hat{G}, \tau \in \widehat{G_0}\}$ の合成積 $*$ を

$$\begin{aligned}
&(ch(\pi_i), \circ) * (ch(\pi_j), \circ) := (ch(\pi_i)ch(\pi_j), \circ),\\
&(ch(\pi), \circ) * (ch(\tau), \bullet) := (ch(\mathrm{res}_{G_0}^{G}\pi)ch(\tau), \bullet),\\
&(ch(\tau), \bullet) * (ch(\pi), \circ) := (ch(\tau)ch(\mathrm{res}_{G_0}^{G}\pi), \bullet),\\
&(ch(\tau_i), \bullet) * (ch(\tau_j), \bullet) := (ch(\mathrm{ind}_{G_0}^{G}(\tau_i \otimes \tau_j)), \circ)
\end{aligned}$$

により定義する。このとき、結合律

$$(4) \quad (\bullet * \bullet) * \bullet = \bullet * (\bullet * \bullet)$$

がいつでも成り立つとは限らないことがわかった。そこで私達は、admissible pair の概念を導入した。

Definition of admissible pair (G, G_0)

$g \in G_0$ に対して,

$$X(g) := \{s \in G : sgs^{-1} \in G_0\}.$$

とおく. (G, G_0) が admissible pair であるとは, $\tau \in \widehat{G_0}$, $g \in G_0$ $s \in X(g)$ に対して,

$$ch(\tau)(sgs^{-1}) = ch(\tau)(g)$$

を満たすときにいう.

Theorem $\mathcal{K}(\hat{G} \cup \widehat{G_0})$ がハイパー群. ($\Leftrightarrow$ (4) を満たす.) $\Leftrightarrow$ (G, G_0) が admissible pair.

このとき,

$$1 \longrightarrow \mathcal{K}(\hat{G}) \longrightarrow \mathcal{K}(\hat{G} \cup \widehat{G_0}) \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1 : \text{exact}$$

である。また、

(1) $G_0 = G$ のケースでは、$\mathcal{K}(\hat{G} \cup \widehat{G_0}) = \mathcal{K}(\hat{G}) \times \mathbb{Z}_2$ である。
(2) $G_0 = \{e\}$ のケースでは、$\mathcal{K}(\hat{G} \cup \widehat{G_0}) = \mathcal{K}(\hat{G}) \vee \mathbb{Z}_2$ である。

そこで次の問題を考えた。

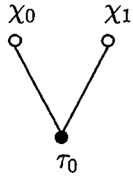
Question どのような pair (G, G_0) が admissible pair か？

(1) G が compact abelian group のときは O.K.

(2) $m > n$ で, $G = S_m$ （m 次対称群）, $G_0 = S_n$ のときは O.K.

(3) $G = H \rtimes_\alpha G_0$, (但し, H, G_0 は finite abelian group). (G, G_0) は admissible pair. しかし, α が自明でない限り, (G, H) は admissible pair でない.

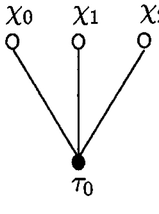
Example 1 $G = \mathbb{Z}_2 = \{e, g\}$ $(g^2 = e)$, $G_0 = \{e\}$.



$\mathcal{K}(\hat{G} \cup \widehat{G_0}) = \{(ch(\chi_0), \circ), (ch(\chi_1), \circ), (ch(\tau_0), \bullet)\}$. $\gamma_0 = (ch(\chi_0), \circ)$, $\gamma_1 = (ch(\chi_1), \circ)$, $\rho_0 = (ch(\tau_0), \bullet)$.

$$\gamma_1\gamma_1 = \gamma_0, \quad \rho_0\rho_0 = \frac{1}{2}\gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_1, \quad \gamma_1\rho_0 = \rho_0.$$

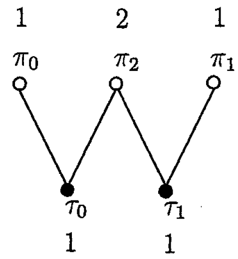
Example 2 $G = \mathbb{Z}_3 = \{e, g, g^2\}$ $(g^3 = e)$ and $G_0 = \{e\}$.



$\mathcal{K}(\hat{G} \cup \widehat{G_0}) = \{(ch(\chi_0), \circ), (ch(\chi_1), \circ), (ch(\chi_2), \circ), (ch(\tau_0), \bullet)\}$.

$$\gamma_1\gamma_1 = \gamma_2, \quad \gamma_2\gamma_2 = \gamma_1, \quad \gamma_1\gamma_2 = \gamma_0,$$
$$\rho_0\rho_0 = \frac{1}{3}\gamma_0 + \frac{1}{3}\gamma_1 + \frac{1}{3}\gamma_2, \quad \gamma_1\rho_0 = \rho_0, \quad \gamma_2\rho_0 = \rho_0.$$

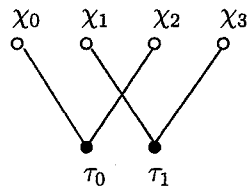
Example 3 $G = S_3 = \mathbb{Z}_3 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$, $G_0 = \mathbb{Z}_2$.



$$\gamma_1\gamma_1=\gamma_0,\quad \gamma_2\gamma_2=\frac{1}{4}\gamma_0+\frac{1}{4}\gamma_1+\frac{1}{2}\gamma_2,\quad \gamma_1\gamma_2=\gamma_2,\quad \rho_0\rho_0=\rho_1\rho_1=\frac{1}{3}\gamma_0+\frac{2}{3}\gamma_2,$$
$$\rho_0\rho_1=\rho_1\rho_0=\frac{1}{3}\gamma_1+\frac{2}{3}\gamma_2,\quad \gamma_0\rho_0=\rho_0,\quad \gamma_1\rho_0=\rho_1,\quad \gamma_2\rho_0=\frac{1}{2}\rho_0+\frac{1}{2}\rho_1,$$
$$\gamma_0\rho_1=\rho_1,\quad \gamma_1\rho_1=\rho_0,\quad \gamma_2\rho_1=\frac{1}{2}\rho_0+\frac{1}{2}\rho_1.$$

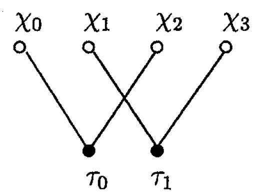
Remark $\mathcal{K}(\widehat{\mathbb{Z}_2}\cup\widehat{\{e\}})=\mathcal{K}(A_3)$, $\mathcal{K}(\widehat{\mathbb{Z}_3}\cup\widehat{\{e\}})=\mathcal{K}(D_4)$, $\mathcal{K}(\widehat{S_3}\cup\widehat{\mathbb{Z}_2})=\mathcal{K}(A_5)$. 但し, A_3, D_4, A_5 は Dynkin diagram.

Example 4 $G=\mathbb{Z}_4=\{e,g,g^2,g^3\}$ $(g^4=e)$, $G_0=\mathbb{Z}_2$.



$$\gamma_1\gamma_1=\gamma_2,\quad \gamma_2\gamma_2=\gamma_0,\quad \gamma_3\gamma_3=\gamma_1,\quad \gamma_1\gamma_2=\gamma_3,\quad \gamma_1\gamma_3=\gamma_0,\quad \gamma_2\gamma_3=\gamma_1,$$
$$\rho_0\rho_0=\rho_1\rho_1=\frac{1}{2}\gamma_0+\frac{1}{2}\gamma_2,\quad \rho_0\rho_1=\rho_1\rho_0=\frac{1}{2}\gamma_1+\frac{1}{2}\gamma_3,\quad \gamma_0\rho_0=\rho_0,\quad \gamma_1\rho_0=\rho_1,$$
$$\gamma_2\rho_0=\rho_0,\quad \gamma_3\rho_0=\rho_1,\quad \gamma_0\rho_1=\rho_1,\quad \gamma_1\rho_1=\rho_0,\quad \gamma_2\rho_1=\rho_1,\quad \gamma_3\rho_1=\rho_0.$$

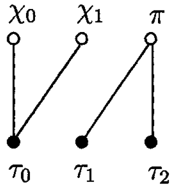
Example 5 $G=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2=\{(e,e),(e,g),(g,e),(g,g)\}$ $(g^2=e)$, $G_0=\mathbb{Z}_2$.



$$\gamma_1\gamma_1=\gamma_0,\quad \gamma_2\gamma_2=\gamma_0,\quad \gamma_3\gamma_3=\gamma_0,\quad \gamma_1\gamma_2=\gamma_3,\quad \gamma_1\gamma_3=\gamma_2,\quad \gamma_2\gamma_3=\gamma_1,$$

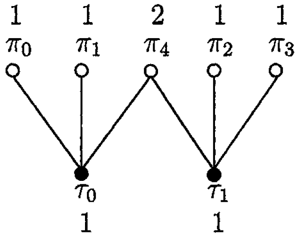
$$\rho_0\rho_0 = \rho_1\rho_1 = \frac{1}{2}\gamma_0 + \frac{1}{2}\gamma_2, \quad \rho_0\rho_1 = \rho_1\rho_0 = \frac{1}{2}\gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_3, \quad \gamma_0\rho_0 = \rho_0, \quad \gamma_1\rho_0 = \rho_1,$$
$$\gamma_2\rho_0 = \rho_0, \quad \gamma_3\rho_0 = \rho_1, \quad \gamma_0\rho_1 = \rho_1, \quad \gamma_1\rho_1 = \rho_0, \quad \gamma_2\rho_1 = \rho_1, \quad \gamma_3\rho_1 = \rho_0.$$

Example 6 $G = S_3 = \mathbb{Z}_3 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$ and $G_0 = \mathbb{Z}_3$.



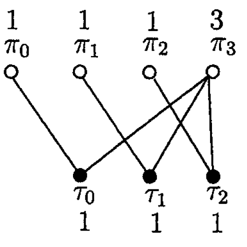
$\mathcal{K}(\hat{G} \cup \widehat{G_0})$ はハイパー群にならない.

Example 7 $D_4 = \mathbb{Z}_4 \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$, $G_0 = \mathbb{Z}_2$.



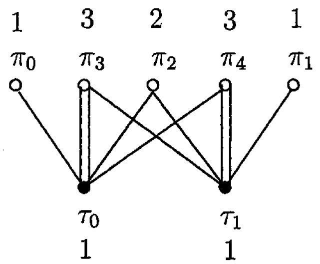
$$\gamma_1\gamma_1 = \gamma_0, \quad \gamma_2\gamma_2 = \frac{1}{4}\gamma_0 + \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_3 + \frac{1}{4}\gamma_4, \quad \gamma_3\gamma_3 = \gamma_0, \quad \gamma_4\gamma_4 = \gamma_0,$$
$$\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2, \quad \gamma_1\gamma_3 = \gamma_4, \quad \gamma_1\gamma_4 = \gamma_3, \quad \gamma_2\gamma_3 = \gamma_2, \quad \gamma_2\gamma_4 = \gamma_2, \quad \gamma_3\gamma_4 = \gamma_1,$$
$$\rho_0\rho_0 = \rho_1\rho_1 = \frac{1}{4}\gamma_0 + \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_2, \quad \rho_0\rho_1 = \frac{1}{2}\gamma_2 + \frac{1}{4}\gamma_3 + \frac{1}{4}\gamma_4,$$
$$\gamma_1\rho_0 = \rho_0, \quad \gamma_2\rho_0 = \frac{1}{2}\rho_0 + \frac{1}{2}\rho_1, \quad \gamma_3\rho_0 = \rho_1, \quad \gamma_4\rho_0 = \rho_1,$$
$$\gamma_1\rho_1 = \rho_1, \quad \gamma_2\rho_1 = \frac{1}{2}\rho_0 + \frac{1}{2}\rho_1, \quad \gamma_3\rho_1 = \rho_0, \quad \gamma_4\rho_1 = \rho_0.$$

Example 8 $A_4 = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_3$, $G_0 = \mathbb{Z}_3$.



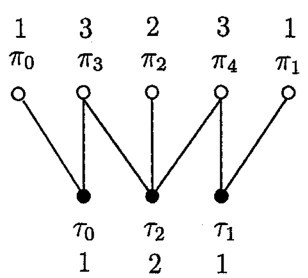
$$\gamma_1\gamma_1=\gamma_2,\quad \gamma_2\gamma_2=\gamma_1,\quad \gamma_3\gamma_3=\frac{1}{9}\gamma_0+\frac{1}{9}\gamma_1+\frac{1}{9}\gamma_2+\frac{2}{3}\gamma_3,\quad \gamma_1\gamma_2=\gamma_0,$$
$$\gamma_1\gamma_3=\gamma_3,\quad \gamma_2\gamma_3=\gamma_3,\quad \rho_0\rho_0=\rho_1\rho_2=\frac{1}{4}\gamma_0+\frac{3}{4}\gamma_3,\quad \rho_0\rho_1=\frac{1}{4}\gamma_1+\frac{3}{4}\gamma_3,$$
$$\rho_0\rho_2=\frac{1}{4}\gamma_2+\frac{3}{4}\gamma_3,\quad \gamma_1\rho_0=\rho_1,\quad \gamma_2\rho_0=\rho_2,\quad \gamma_1\rho_1=\rho_2,\quad \gamma_2\rho_1=\rho_0,$$
$$\gamma_3\rho_0=\gamma_3\rho_1=\gamma_3\rho_2=\frac{1}{3}\rho_0+\frac{1}{3}\rho_1+\frac{1}{3}\rho_2.$$

Example 9 $S_4=A_4\rtimes_\alpha\mathbb{Z}_2$, $G_0=\mathbb{Z}_2$.



$$\gamma_1\gamma_1=\gamma_0,\quad \gamma_2\gamma_2=\frac{1}{4}\gamma_0+\frac{1}{4}\gamma_1+\frac{1}{2}\gamma_2,\quad \gamma_3\gamma_3=\gamma_4\gamma_4=\frac{1}{9}\gamma_0+\frac{2}{9}\gamma_2+\frac{1}{3}\gamma_3+\frac{1}{3}\gamma_4,$$
$$\gamma_1\gamma_2=\gamma_2,\quad \gamma_1\gamma_3=\gamma_4,\quad \gamma_1\gamma_4=\gamma_3,\quad \gamma_2\gamma_3=\gamma_2\gamma_4=\frac{1}{2}\gamma_3+\frac{1}{2}\gamma_4,$$
$$\gamma_3\gamma_4=\frac{1}{9}\gamma_1+\frac{2}{9}\gamma_2+\frac{1}{3}\gamma_3+\frac{1}{3}\gamma_4,\quad \rho_0\rho_0=\rho_1\rho_1=\frac{1}{12}\gamma_0+\frac{1}{6}\gamma_2+\frac{1}{2}\gamma_3+\frac{1}{4}\gamma_4,$$
$$\rho_0\rho_1=\rho_1\rho_0=\frac{1}{12}\gamma_1+\frac{1}{6}\gamma_2+\frac{1}{4}\gamma_3+\frac{1}{2}\gamma_4,\quad \gamma_0\rho_0=\rho_0,\quad \gamma_1\rho_0=\rho_1,$$
$$\gamma_2\rho_0=\frac{1}{2}\rho_0+\frac{1}{2}\rho_1,\quad \gamma_3\rho_0=\frac{2}{3}\rho_0+\frac{1}{3}\rho_1,\quad \gamma_4\rho_0=\frac{1}{3}\rho_0+\frac{2}{3}\rho_1,\quad \gamma_0\rho_1=\rho_1,$$
$$\gamma_1\rho_1=\rho_0,\quad \gamma_2\rho_1=\frac{1}{2}\rho_0+\frac{1}{2}\rho_1,\quad \gamma_3\rho_1=\frac{1}{3}\rho_0+\frac{2}{3}\rho_1,\quad \gamma_4\rho_1=\frac{2}{3}\rho_0+\frac{1}{3}\rho_1.$$

Example 10 $G=S_4$, $G_0=S_3$.



$$\gamma_1\gamma_1 = \gamma_0, \quad \gamma_2\gamma_2 = \frac{1}{4}\gamma_0 + \frac{1}{4}\gamma_1 + \frac{1}{2}\gamma_2, \quad \gamma_3\gamma_3 = \gamma_4\gamma_4 = \frac{1}{9}\gamma_0 + \frac{2}{9}\gamma_2 + \frac{1}{3}\gamma_3 + \frac{1}{3}\gamma_4,$$
$$\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2, \quad \gamma_1\gamma_3 = \gamma_4, \quad \gamma_1\gamma_4 = \gamma_3, \quad \gamma_2\gamma_3 = \gamma_2\gamma_4 = \frac{1}{2}\gamma_3 + \frac{1}{2}\gamma_4,$$
$$\gamma_3\gamma_4 = \frac{1}{9}\gamma_1 + \frac{2}{9}\gamma_2 + \frac{1}{3}\gamma_3 + \frac{1}{3}\gamma_4, \quad \rho_0\rho_0 = \rho_1\rho_1 = \frac{1}{4}\gamma_0 + \frac{3}{4}\gamma_3,$$
$$\rho_2\rho_2 = \frac{1}{16}\gamma_0 + \frac{1}{16}\gamma_1 + \frac{1}{8}\gamma_2 + \frac{3}{8}\gamma_3 + \frac{3}{8}\gamma_4, \quad \rho_1\rho_2 = \frac{1}{4}\gamma_2 + \frac{3}{8}\gamma_3 + \frac{4}{8}\gamma_4,$$
$$\gamma_0\rho_0 = \rho_0, \quad \gamma_1\rho_0 = \rho_1, \quad \gamma_2\rho_0 = \rho_2, \quad \gamma_3\rho_0 = \frac{1}{3}\rho_0 + \frac{2}{3}\rho_2, \quad \gamma_4\rho_0 = \frac{1}{3}\rho_1 + \frac{2}{3}\rho_2,$$
$$\gamma_0\rho_1 = \rho_1, \quad \gamma_1\rho_1 = \rho_0, \quad \gamma_2\rho_1 = \rho_2, \quad \gamma_3\rho_1 = \frac{1}{3}\rho_1 + \frac{2}{3}\rho_2, \quad \gamma_4\rho_1 = \frac{1}{3}\rho_0 + \frac{2}{3}\rho_2,$$
$$\gamma_0\rho_2 = \rho_2, \quad \gamma_1\rho_2 = \rho_2, \quad \gamma_2\rho_2 = \frac{1}{4}\rho_0 + \frac{1}{4}\rho_1 + \frac{1}{2}\rho_2,$$
$$\gamma_3\rho_2 = \gamma_4\rho_0 = \frac{1}{6}\rho_0 + \frac{1}{6}\rho_1 + \frac{2}{3}\rho_2.$$

(B) Compact hypergroups.

H が compact hypergroup のとき、$\mathcal{K}(\hat{H}) = \{ch(\pi) : \pi \in \hat{H}\}$ はハイパー群になるとは限らない。$\mathcal{K}(\hat{H})$ がハイパー群になるとき、H を strong type という。以下、H が strong type であると仮定する。さらに、H_0 を subhypergroup of H with $|H/H_0| < +\infty$, strong type とする。このとき、

$$\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0}, \mathbb{Z}_q(2)) = \{(ch(\pi), \circ), (ch(\tau), \bullet) : \pi \in \hat{H}, \tau \in \widehat{H_0}\}$$

とおく。

Definition of convolution $* = *_q$ $(0 < q \leq 1)$

(1) $(ch(\pi_i), \circ) * (ch(\pi_j), \circ) := (ch(\pi_i)ch(\pi_j), \circ)$,

(2) $(ch(\pi), \circ) * (ch(\tau), \bullet) := ((\mathrm{res}^H_{H_0} ch(\pi))ch(\tau), \bullet)$,

(3) $(ch(\tau), \bullet) * (ch(\pi), \circ) := (ch(\tau)(\mathrm{res}^H_{H_0} ch(\pi)), \bullet)$,

(4) $(ch(\tau_i), \bullet) * (ch(\tau_j), \bullet) := q(\mathrm{ind}^H_{H_0}(ch(\tau_i)ch(\tau_j)), \circ) + (1-q)(ch(\tau_i)ch(\tau_j), \bullet)$.

Definition of admissible pair (H, H_0)

以下の条件を満たすとき, (H, H_0) を admissible pair という.

(1) For $\pi \in \hat{H}$ and $\tau \in \widehat{H_0}$,

$$\mathrm{ind}^H_{H_0}((\mathrm{res}^H_{H_0} ch(\pi))ch(\tau)) = ch(\pi)\mathrm{ind}^H_{H_0} ch(\tau).$$

(2) For $\tau \in \widehat{H_0}$,

$$\mathrm{res}^H_{H_0}(\mathrm{ind}^H_{H_0} ch(\tau)) = ch(\tau)\mathrm{res}^H_{H_0}(\mathrm{ind}^H_{H_0} ch(\tau_0)),$$

where τ_0 is the trivial representation of H_0.

Theorem $\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0}, \mathbb{Z}_q(2))$ が hypergroup. $\Leftrightarrow$ (H, H_0) : admissible pair.
このとき,

$$1 \longrightarrow \mathcal{K}(H) \longrightarrow \mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0}, \mathbb{Z}_q(2)) \longrightarrow \mathbb{Z}_q(2) \longrightarrow 1 : \text{exact}$$

(1) H : compact commutative hypergroup のケースは O.K.

(2) $H_0 = H$ のケース. $\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0}, \mathbb{Z}_q(2)) = \mathcal{K}(\hat{H}) \times \mathbb{Z}_q(2)$.

(3) H が finite hypergroup で, $H_0 = \{h_0\}$ のケース. $\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0}, \mathbb{Z}_q(2)) = \mathcal{K}(\hat{H}) \vee \mathbb{Z}_q(2)$.

Example 1 $H = \mathbb{Z}_p(3) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$, $H_0 = \mathbb{Z}_2$.
$\mathcal{K}(\widehat{\mathbb{Z}_p(3)} \cup \widehat{\{c_0\}}, \mathbb{Z}_q(2)) = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \rho_0\}$ are

$$\gamma_1\gamma_1 = \frac{1-p}{2}\gamma_1 + \frac{1+p}{2}\gamma_2, \quad \gamma_2\gamma_2 = \frac{1+p}{2}\gamma_1 + \frac{1-p}{2}\gamma_2,$$
$$\gamma_1\gamma_2 = p\gamma_0 + \frac{1-p}{2}\gamma_1 + \frac{1-p}{2}\gamma_2, \quad \rho_0\rho_0 = \frac{q}{3}\gamma_0 + \frac{q}{3}\gamma_1 + \frac{q}{3}\gamma_2 + (1-q)\rho_0,$$
$$\gamma_1\rho_0 = \gamma_2\rho_0 = \rho_0.$$

Example 2 $H = (\mathbb{Z}_q(2) \times \mathbb{Z}_q(2)) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$ は $q \neq 1$ のとき, strong でない.

Example 3 $H = \mathbb{Z}_{(p,r)}(4) \rtimes_\alpha \mathbb{Z}_2$, $H_0 = \mathbb{Z}_2$.
$\mathcal{K}(\widehat{\mathbb{Z}_{(p,r)}(4)} \cup \widehat{\{c_0\}}, \mathbb{Z}_q(2)) = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \rho_0\}$ are

$$\gamma_1\gamma_1 = \gamma_3\gamma_3 = \frac{1-p}{2}\gamma_1 + p\gamma_2 + \frac{1-p}{2}\gamma_3, \quad \gamma_2\gamma_2 = r\gamma_0 + (1-r)\gamma_2,$$
$$\gamma_1\gamma_2 = \frac{1-r}{2}\gamma_1 + \frac{1+r}{2}\gamma_3, \quad \gamma_1\gamma_3 = \frac{2pr}{1+r}\gamma_0 + \frac{1-p}{2}\gamma_1 + \frac{p-pr}{1+r}\gamma_2 + \frac{1-p}{2}\gamma_3,$$
$$\gamma_2\gamma_3 = \frac{1+r}{2}\gamma_1 + \frac{1-r}{2}\gamma_3, \quad \rho_0\rho_0 = \frac{q}{4}\gamma_0 + \frac{q}{4}\gamma_1 + \frac{q}{4}\gamma_2 + \frac{q}{4}\gamma_3 + (1-q)\rho_0,$$
$$\gamma_1\rho_0 = \gamma_2\rho_0 = \gamma_3\rho_0 = \rho_0.$$

(C) Commutative hypergroups.

H が commutative hypergroup of strong type で、H_0 が closed subhypergroup of H such that

$$H^\perp : \text{compact in } \hat{H}$$

であるとする。また、φ が the hyperfield of $\hat{H}$ based on $\mathbb{Z}_q(2) = \{c_0, c_1\}$ such that

$$\varphi(c_0) = \hat{H}, \quad \varphi(c_1) = \hat{H}/H_0^{\perp} = \hat{Q},$$

where $Q = H/H_0$ とする。

このとき、$\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0}, \mathbb{Z}_q(2))$ と $\mathcal{K}(\hat{H}, \varphi, \mathbb{Z}_q(2))$ が定義される.

Theorem $\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0}, \mathbb{Z}_q(2))$ is a hypergroup and $\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0}, \mathbb{Z}_q(2)) \cong \mathcal{K}(\hat{H}, \varphi, \mathbb{Z}_q(2))$.

H と H_0 が Pontryagin type, i.e. $\hat{\hat{H}} \cong H$ and $\widehat{\widehat{H_0}} \cong H_0$ のとき

Theorem $\widehat{\mathcal{K}}(\hat{H} \cup \widehat{H_0}, \mathbb{Z}_q(2)) \cong \mathcal{K}(\mathbb{Z}_q(2), \hat{\varphi}, H)$ where $\hat{\varphi}$ is the dual hyperfield of $\mathbb{Z}_q(2)$ based on H.

Example 1 $H = \mathbb{Z} \supset H_0 = n\mathbb{Z}$ $(n \in \mathbb{N})$.

$$\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0}, \mathbb{Z}_q(2)) = \mathbb{T} \cup \mathbb{T} \quad \text{(refer to Voit, [8])}.$$

Example 2 $H = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \supset H_0 = m\mathbb{Z} \times n\mathbb{Z}$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

$$\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0}, \mathbb{Z}_q(2)) = \mathbb{T}^2 \cup \mathbb{T}^2.$$

Example 3 $H = \mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \supset H_0 = n\mathbb{Z} \times \{0\}$ $(n \in \mathbb{N})$.

$$\mathcal{K}(\hat{H} \cup \widehat{H_0}, \mathbb{Z}_q(2)) = \mathbb{T}^2 \cup \mathbb{T}.$$

References

[1] A commutative hypergroup associated with a hyperfield, H. Heyer, S. Kawakami, T. Tsurii, S. Yamanaka, 2016, arXiv : 1604.04361v1[math.FA].

[2] Hypergroups related to a pair of compact hypergroups, H. Heyer, S. Kawakami, T. Tsurii, S. Yamanaka, 2016, arXiv : 1605.07010v1[math.RT].

[3] Hypergroups arising from characters of a compact group and its subgroup, H. Heyer, S. Kawakami, T. Tsurii, S. Yamanaka, 2016, arXiv : 1605.03744v1[math.RT].

[4] Hypergroup structures arising from certain dual objects of a hypergroup, H. Heyer, S. Kawakami, to appear in J. Math. Soc. Japan, 2016.

[5] Deformations of finite hypergroups, S. Kawakami, T. Tsurii, S. Yamanaka, Sci. Math. Jpn., 2015, published online (2015-21).

[6] Characters of induced representations of a compact hypergroup, H. Heyer, S. Kawakami, S. Yamanaka, Monatsh. Math., Vol. 179 (2016), No.3, pp.421-440.

[7] An Imprimitivity theorem for representations of a semi-direct product hypergroup, H. Heyer, S. Kawakami, Journal of Lie Theory, Vol. 24 (2014), pp.159-178.

[8] Hypergroups on two tori, M. Voit, Semigroup Forum vol.76 (2008), pp.192-203.